МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Уральский государственный экономический университет»

Одобрена
на заседании кафедры

27.12.2019 г.

протокол № 3

Зав. кафедрой Стариков Е..Н.

Утверждена
Советом по учебно-методическим вопросам и качеству образования

15 января 2020 г.

протокол № 5

Председатель____________________ Карх Д.А.
(подпись)

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Наименование дисциплины	Функциональный анализ
Направление подготовки	02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем
Профиль	Разработка и администрирование информационных систем
Форма обучения	очная
Год набора	2020

Разработана:
Профессор,д.ф.м.н.
Осипов А.В.

Екатеринбург
2020 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Рабочая программа дисциплины является частью основной профессиональной образовательной программы высшего образования - программы бакалавриата, разработанной в соответствии с ФГОС ВО

ФГОС ВО	Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования по направлению подготовки 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем (уровень бакалавриата) (приказ Минобрнауки России от 23.08.2017г. №809)
ПС	

1. ЦЕЛЬ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Формирование у студентов компетенций, направленных на использование законов и методов математических наук при решении профильных задач

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП

Дисциплина относится к базовой части учебного плана.

3. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ

Промежуточный контроль	Часов					З.е.
	Всего за семестр	Контактная работа .(по уч.зан.)			Самостоятельная работа в том числе подготовка контрольных и курсовых	
		Всего	Лекции	Практические занятия, включая курсовое проектирование		
Семестр 6						
Экзамен	144	54	18	36	63	4

4.ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ ОПОП

В результате освоения ОПОП у выпускника должны быть сформированы компетенции, установленные в соответствии ФГОС ВО.

Общепрофессиональные компетенции (ОПК)

Шифр и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенций
ОПК-2 Способен применять современный математический аппарат, связанный с проектированием, разработкой, реализацией и оценкой качества программных продуктов и программных комплексов в различных областях человеческой деятельности	ИД-1.ОПК-2 Знать: математические основы программирования и языков программирования, организации баз данных и компьютерного моделирования; математические методы оценки качества, надежности и эффективности программных продуктов; математические методы организации информационной безопасности при разработке и эксплуатации программных продуктов и программных. Уметь: выбирать современные информационные технологии и программные средства, в том числе отечественного производства при решении задач профессиональной деятельности. Иметь навыки: применения современных информационных технологий и программных средств, в том числе отечественного производства, при решении задач профессиональной деятельности

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ИД-1.ОПК-1 Знать: обладать базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук. Уметь: использовать их в профессиональной деятельности. Иметь навыки: теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности.

5. ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

Тема	Часов						
	Наименование темы	Всего часов	Контактная работа .(по уч.зан.)			Самост. работа	Контроль самостоятельной работы
			Лекции	Лабораторные	Практические занятия		
Семестр 6		117					
Тема 1.	Метрические, линейные нормированные пространства (ЛНП)	16	2		2	12	
Тема 2.	Классические ЛНП, их свойства	18	4		4	10	
Тема 3.	Непрерывные отображения метрических пространств, сравнение	16	4		6	6	
Тема 4.	Полнота, сепарабельность и компактность метрических	20	2		8	10	
Тема 5.	Гильбертовы пространства	21	2		8	11	
Тема 6.	Линейные операторы и функционалы в ЛНП	26	4		8	14	

6. ФОРМЫ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ШКАЛЫ ОЦЕНИВАНИЯ

Раздел/Тема	Вид оценочного средства	Описание оценочного средства	Критерии оценивания
Текущий контроль (Приложение 4)			
Тема 1-2.	Контрольная работа№1 (Приложение 4)	Контрольная работа содержит 16 типовых задач по материалу Тем 1 и 2.	8 баллов Оценка: 0.5 балла за задачу.
Тема 3-4.	Контрольная работа №2 (Приложение 4)	Контрольная работа содержит 9 типовых задач по материалу Тем 3 и 4.	10 баллов Оценка: 1 балл за задачу. 10 баллов при решении всех задач.
Тема 5-6.	Контрольная работа №3 (Приложение 4)	Контрольная работа содержит 20 типовых задач по материалу Тем 5 и 6.	10 баллов Оценка: 0,5 балла за задачу. 10 баллов при решении 20 задач.
Промежуточный контроль (Приложение 5)			

6 семестр (Эк)	Экзаменационный билет (Приложение 5)	Комплект из 27 билетов каждый из которых содержит 1 теоретический вопрос и 3 практических задания	Теоретический вопрос оценивается в 40 баллов, практические задания по 20 баллов; всего по билету- 100 баллов

ОПИСАНИЕ ШКАЛ ОЦЕНИВАНИЯ

Показатель оценки освоения ОПОП формируется на основе объединения текущей и промежуточной аттестации обучающегося.

Показатель рейтинга по каждой дисциплине выражается в процентах, который показывает уровень подготовки студента.

Текущая аттестация. Используется 100-балльная система оценивания. Оценка работы студента в течении семестра осуществляется преподавателем в соответствии с разработанной им системой оценки учебных достижений в процессе обучения по данной дисциплине.

В рабочих программах дисциплин и практик закреплены виды текущей аттестации, планируемые результаты контрольных мероприятий и критерии оценки учебный достижений.

В течение семестра преподавателем проводится не менее 3-х контрольных мероприятий, по оценке деятельности студента. Если посещения занятий по дисциплине включены в рейтинг, то данный показатель составляет не более 20% от максимального количества баллов по дисциплине.

Промежуточная аттестация. Используется 5-балльная система оценивания. Оценка работы студента по окончанию дисциплины (части дисциплины) осуществляется преподавателем в соответствии с разработанной им системой оценки достижений студента в процессе обучения по данной дисциплине. Промежуточная аттестация также проводится по окончанию формирования компетенций.

Порядок перевода рейтинга, предусмотренных системой оценивания, по дисциплине, в пятибалльную систему.

Высокий уровень – 100% - 70% - отлично, хорошо.

Средний уровень – 69% - 50% - удовлетворительно.

Показатель оценки	**По 5-балльной системе**	**Характеристика показателя**
100% - 85%	отлично	обладают теоретическими знаниями в полном объеме, понимают, самостоятельно умеют применять, исследовать, идентифицировать, анализировать, систематизировать, распределять по категориям, рассчитать показатели, классифицировать, разрабатывать модели, алгоритмизировать, управлять, организовать, планировать процессы исследования, осуществлять оценку результатов на высоком уровне
84% - 70%	хорошо	обладают теоретическими знаниями в полном объеме, понимают, самостоятельно умеют применять, исследовать, идентифицировать, анализировать, систематизировать, распределять по категориям, рассчитать показатели, классифицировать, разрабатывать модели, алгоритмизировать, управлять, организовать, планировать процессы исследования, осуществлять оценку результатов. Могут быть допущены недочеты, исправленные студентом самостоятельно в процессе работы (ответа и т.д.)
69% - 50%	удовлетворительно	обладают общими теоретическими знаниями, умеют применять, исследовать, идентифицировать, анализировать, систематизировать, распределять по категориям, рассчитать показатели, классифицировать, разрабатывать модели, алгоритмизировать, управлять, организовать, планировать процессы исследования, осуществлять оценку результатов на среднем уровне. Допускаются ошибки, которые студент затрудняется исправить самостоятельно.
49 % и менее	неудовлетворительно	обладают не полным объемом общих теоретическими знаниями, не умеют самостоятельно применять, исследовать, идентифицировать, анализировать, систематизировать, распределять по категориям, рассчитать показатели, классифицировать, разрабатывать модели, алгоритмизировать, управлять, организовать, планировать процессы исследования, осуществлять оценку результатов. Не сформированы умения и навыки для решения
100% - 50%	зачтено	характеристика показателя соответствует «отлично», «хорошо», «удовлетворительно»
49 % и менее	не зачтено	характеристика показателя соответствует «неудовлетворительно»

7. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

7.1. Содержание лекций

Тема 1. Метрические, линейные нормированные пространства (ЛНП) Определение и непрерывность метрики. Сходимость в метрических пространствах. Теорема Бэра.

Тема 2. Классические ЛНП, их свойства Норма и нормированные пространства. Полунормы. Определение пространств Lp. Полнота пространств Lp. Определение пространств lp(N). Вложенность пространств Lp.
Тема 3. Непрерывные отображения метрических пространств, сравнение метрик Линейные функционалы. Описание линейных непрерывных функционалов в различных пространствах. Теорема Хана-Банаха и ее приложения.
Тема 4. Полнота, сепарабельность и компактность метрических пространств Полные множества в Lp. Полнота характеристических функций. Полнота в Lp(Rn) гладких функций с компактным носителем. Теорема Стоуна-Вейерштрасса в вещественном и комплексном
Тема 5. Гильбертовы пространства Скалярное произведение, неравенство Коши-Буняковского. Определение гильбертова пространства. Примеры. Ортогональная проекция. Ортогональные ряды. Ряды Фурье. Полные системы. Примеры классических ортогональных систем. Существование полной системы в сепарабельном гильбертовом пространстве.
Тема 6. Линейные операторы и функционалы в ЛНП Линейные операторы. Непрерывные и ограниченные операторы. Норма оператора. Пространство линейных операторов и его полнота. Ядро и образ линейного оператора. Алгебраическая обратимость и обратимость оператора. Теорема Банаха об обратном операторе. Теорема о замкнутом графике. Линейные функционалы. Описание линейных непрерывных функционалов в различных пространствах. Теорема Рисса о представлении функционалов в гильбертовом пространстве. Теорема Хана-Банаха и ее приложения. Понятие второго сопряженного пространства. Рефлексивные пространства. Рефлексивность гильбертовых пространств. Продолжение непрерывных операторов с плотного множества. Пополнение линейных нормированных пространств. Сопряженный оператор. Самосопряженные, унитарные, нормальные операторы. Примеры. Операторы проектирования. Интегральные операторы.

7.2 Содержание практических занятий и лабораторных работ

Тема 1. Метрические, линейные нормированные пространства (ЛНП) Открытые, замкнутые и компактные множества. Теоремы Вейерштрасса и Кантора. Теорема о сжимающих отображениях.
Тема 2. Классические ЛНП, их свойства Простейшие примеры (пространства с равномерной нормой). Непрерывность нормы и линейных операций. Понятие полноты.
Тема 3. Непрерывные отображения метрических пространств, сравнение метрик Непрерывные и ограниченные операторы. Норма оператора. Ядро и образ линейного оператора. Алгебраическая обратимость и обратимость оператора. Теорема Банаха об обратном операторе. Теорема о замкнутом графике. Линейные функционалы. Описание линейных непрерывных функционалов в различных пространствах.
Тема 4. Полнота, сепарабельность и компактность метрических пространств Понятие сильной сходимости операторов. Принцип равномерной ограниченности. Теорема Банаха-Штейнгауза. Непрерывность в среднем функций из Lp(Rn). Теорема Римана-Лебега. Сильная аппроксимация тождественного оператора в разных функциональных пространствах. Суммирование рядов Фурье по Фейеру и по Абелю. Связь сильной и равномерной сходимости операторов. Понятие слабой и слабой * сходимости. Слабая * компактность единичного шара в сопряженном пространстве. Примеры.

Тема 5. Гильбертовы пространства Скалярное произведение, неравенство Коши-Буняковского. Определение гильбертова пространства. Примеры. Ортогональная проекция. Ортогональные ряды. Ряды Фурье. Полные системы. Примеры классических ортогональных систем. Существование полной системы в сепарабельном гильбертовом пространстве. Пространство линейных операторов и его полнота. Ядро и образ линейного оператора. Алгебраическая обратимость и обратимость оператора. Теорема Банаха об обратном операторе. Теорема о замкнутом графике. Линейные функционалы. Описание линейных непрерывных функционалов в различных пространствах. Теорема Рисса о представлении функционалов в гильбертовом пространстве. Теорема Хана-Банаха и ее приложения. Понятие второго сопряженного пространства. Рефлексивные пространства. Рефлексивность гильбертовых пространств. Продолжение непрерывных операторов с плотного множества. Пополнение линейных нормированных пространств. Сопряженный оператор. Самосопряженные, унитарные, нормальные операторы. Примеры.
Тема 6. Линейные операторы и функционалы в ЛНП Ядро и образ линейного оператора. Алгебраическая обратимость и обратимость оператора. Теорема Банаха об обратном операторе. Теорема о замкнутом графике. Линей-ные функционалы. Описание линейных непрерывных функционалов в различных пространствах. Теорема Рисса о представлении функционалов в гильберто-вом пространстве. Понятие второго сопряженного пространства. Рефлексивные пространства. Рефлексивность гильбертовых пространств. Продолжение непрерывных операторов с плотного множества. Пополнение линейных нормированных пространств. Сопряженный оператор. Самосопряженные, унитарные, нормальные операторы.

7.3. Содержание самостоятельной работы

Тема 1. Метрические, линейные нормированные пространства (ЛНП) Полнота метрического пространства.
Тема 2. Классические ЛНП, их свойства Понятие полноты. Полунормы. Неравенства Юнга, Гельдера и Минковского.
Тема 3. Непрерывные отображения метрических пространств, сравнение метрик Линейные операторы. Непрерывные и ограниченные операторы. Норма оператора. Пространство линейных операторов и его полнота. Ядро и образ линейного оператора. Алгебраическая обратимость и обратимость оператора. Теорема Банаха об обратном операторе. Теорема о замкнутом графике. Теорема Рисса о представлении функционалов в гильбертовом пространстве. Теорема Хана-Банаха и ее приложения. Понятие второго сопряженного пространства. Рефлексивные пространства. Продолжение непрерывных операторов с плотного множества. Пополнение линейных нормированных пространств. Сопряженный оператор. Самосопряженные, унитарные, нормальные операторы. Примеры.
Тема 4. Полнота, сепарабельность и компактность метрических пространств Связь сильной и равномерной сходимости операторов. Понятие слабой и слабой * сходимости. Полные множества в Lp. Полнота в Lp(Rn) гладких функций с компактным носителем.
Тема 5. Гильбертовы пространства Линейные операторы. Непрерывные и ограниченные операторы. Норма оператора. Пространство линейных операторов и его полнота. Ядро и образ линейного оператора. Алгебраическая обратимость и обратимость оператора. Теорема Банаха об обратном операторе. Теорема о замкнутом графике. Линейные функционалы. Теорема Хана-Банаха и ее приложения. Понятие второго сопряженного пространства. Рефлексивные пространства. Рефлексивность гильбертовых пространств. Продолжение непрерывных операторов с плотного множества. Пополнение линейных нормированных пространств. Сопряженный оператор. Самосопряженные, унитарные, нормальные операторы. Примеры. Операторы проектирования. Интегральные операторы. Тест Шура. Примеры.

Тема 6. Линейные операторы и функционалы в ЛНП Пространство линейных операторов и его полнота. Ядро и образ линейного оператора. Алгебраическая обратимость и обратимость оператора. Теорема Банаха об обратном операторе. Теорема о замкнутом графике. Линейные функционалы. Описание линейных непрерывных функционалов в различ-ных пространствах. Теорема Рисса о представлении функционалов в гильбертовом пространстве. Теорема Хана-Банаха и ее приложения. Понятие второго сопряженного пространства. Продолжение непрерывных операторов с плотного множества. Пополнение линейных нормированных пространств. Сопряженный оператор. Самосопряженные, унитарные, нормальные операторы. Примеры. Операторы проектирования. Интегральные операторы. Тест Шура. Примеры.

7.3.1. Примерные вопросы для самостоятельной подготовки к зачету/экзамену

Приложение 1.

7.3.2. Практические задания по дисциплине для самостоятельной подготовки к зачету/экзамену

Приложение 2.

7.3.3. Перечень курсовых работ

В данной дисциплине не предусмотрены.

7.4. Электронное портфолио обучающегося

Материалы не размещаются

7.5. Методические рекомендации по выполнению контрольной работы

В данной дисциплине не предусмотрены.

7.6 Методические рекомендации по выполнению курсовой работы

В данной дисциплине не предусмотрены.

8. ОСОБЕННОСТИ ОРГАНИЗАЦИИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ ДЛЯ ЛИЦ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ

По заявлению студента

В целях доступности освоения программы для лиц с ограниченными возможностями здоровья при необходимости кафедра обеспечивает следующие условия:

- особый порядок освоения дисциплины, с учетом состояния их здоровья;

- электронные образовательные ресурсы по дисциплине в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья;

- изучение дисциплины по индивидуальному учебному плану (вне зависимости от формы обучения);

- электронное обучение и дистанционные образовательные технологии, которые предусматривают возможности приема-передачи информации в доступных для них формах.

- доступ (удаленный доступ), к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам, состав которых определен РПД.

9. ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНОЙ И ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Сайт библиотеки УрГЭУ

http://lib.usue.ru/

Основная литература:

1. Осиленкер Б. П., Лемин А. Ю.. Задачи и упражнения по функциональному анализу:учебно- практическое пособие. - Москва: МИСИ-МГСУ, 2017. - 133 с.

2. Леонтьева Т. А., Домрина А. В.. Задачи по теории функций и функциональному анализу с решениями:учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по направлению подготовки "Физико-математические науки", а также технических и педагогических вузов. - Москва: ИНФРА-М, 2013. - 164 с.

3. Сухинов А. И., Фирсов И. П.. Лекции по функциональному анализу:[учебное пособие]. - Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета (ЮФУ), 2009. - 189 с.

4. Канторович Л. В., Акилов Г. П.. Функциональный анализ:научное издание. - Москва: Наука, 1984. - 752 с.

Дополнительная литература:

1. Люстерник Л. А., Соболев В. И.. Краткий курс функционального анализа:учебное пособие. - Санкт-Петербург [и др.]: Лань, 2009. - 271 с.

2. Дерр В. Я.. Функциональный анализ:лекции и упражнения: учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по специальности ВО "Математика" и направлениям подготовки ВО "Математика", "Математика. Прикладная математика". - Москва: КноРус, 2016. - 461 с.

10. ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ВКЛЮЧАЯ ПЕРЕЧЕНЬ ЛИЦЕНЗИОННОГО ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ И ИНФОРМАЦИОННЫХ СПРАВОЧНЫХ СИСТЕМ, ОНЛАЙН КУРСОВ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ ОСУЩЕСТВЛЕНИИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Перечень лицензионное программное обеспечение:

Перечень информационных справочных систем, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

Функциональный анализ
https://ru.wikipedia.org/wiki/Функциональный_анализ

11. ОПИСАНИЕ МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЙ БАЗЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Реализация учебной дисциплины осуществляется с использованием материально-технической базы УрГЭУ, обеспечивающей проведение всех видов учебных занятий и научно-исследовательской и самостоятельной работы обучающихся:

Специальные помещения представляют собой учебные аудитории для проведения всех видов занятий, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду УрГЭУ.

Все помещения укомплектованы специализированной мебелью и оснащены мультимедийным оборудованием спецоборудованием (информационно-телекоммуникационным, иным компьютерным), доступом к информационно-поисковым, справочно-правовым системам, электронным библиотечным системам, базам данных действующего законодательства, иным информационным ресурсам служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Для проведения занятий лекционного типа презентации и другие учебно-наглядные пособия, обеспечивающие тематические иллюстрации.

Приложение 1

к рабочей программе

7.3.1. Примерные вопросы для самостоятельной подготовки к экзамену

1. Определение и непрерывность метрики.
2. Сходимость в метрических пространствах.
3. Полнота метрического пространства.
4. Открытые, замкнутые и компактные множества.
5. Норма и нормированные пространства.
6. Простейшие примеры (пространства с равномерной нормой).
7. Непрерывность нормы и линейных операций.
8. Понятие полноты. Полунормы.
9. Скалярное произведение, неравенство Коши-Буняковского.
10. Определение гильбертова пространства.
11. Ортогональная проекция. Ортогональные ряды.
12. Ряды Фурье. Полные системы.
13. Линейные операторы.
14. Непрерывные и ограниченные операторы.
15. Норма оператора.
16. Пространство линейных операторов и его полнота.
17. Линейные функционалы.
18. Продолжение непрерывных операторов с плотного множества.
19. Пополнение линейных нормированных пространств.
20. Сопряженный оператор.
21. Полные множества в L^p.
22. Понятие сильной сходимости операторов.
23. Принцип равномерной ограниченности.
24. Суммирование рядов Фурье по Фейеру и по Абелю.
25. Связь сильной и равномерной сходимости операторов.

Понятие компактного и относительно компактного множеств.

Приложение 2

к рабочей программе

7.3.2. Практические задания по дисциплине для самостоятельной подготовки к экзамену

1. Докажите неравенство Коши-Буняковского.

2. Докажите теорему о непрерывности линейного оператора.

3. Докажите, что L2 — Гильбертово пространство.

4. Докажите, что l2 — Гильбертово пространство.

5. Докажите, что l2n(R) — Гильбертово пространство.

6. Докажите теорему об ограниченном операторе.

7. Докажите, что l2n(C) — Гильбертово пространство.

8. Докажите, что l2(C) — Гильбертово пространство.

9. Докажите, что l2(C) — Банахово пространство.

10. Докажите, что C[0,1] — Банахово пространство.

11. Докажите, что Cn[0,1] — Банахово пространство.

12. Докажите, что lp(R) — Банахово пространство.

13. Докажите, что Lp — Банахово пространство.

14. Докажите, что m — не сепарабельное пространство.

15. Докажите, что c — сепарабельное пространство.

16. Покажите, что из сходимости в среднем не следует сходимости почти всюду.

17. Покажите, что из сходимости по мере не следует сходимости почти всюду.

18. Пусть замкнутое множество имеет конечную меру. Может ли оно быть неограниченным?

19. Покажите, что дельта-функция является синуглярной.

20. Обоснуйте формулу для производной обобщенной функции.

21. Обоснуйте формулы вариации функционала по Фреше и по Гато.

22. Выведите формулу Эйлера для простейшей задачи вариационного ис-числения.

Приложение 4

к рабочей программе

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДЕНЫ

на заседании кафедры

шахматного искусства и компьютерной математики

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ

ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

по дисциплине **функциональный анализ**

Контрольная работа №1.

1. Сходится ли в пространстве $C[a, b]$ последовательность функций

$x_n = t^n - t^{n+2}$?

2. Сходится ли в пространстве $C[a, b]$ последовательность функций
$x_n = t^n - t^{3n}$?

3. Сходится ли в пространстве $C[a, b]$ последовательность функций

$x_n = t^n - t^{2n}$?

4. Сходится ли в пространстве $C^1[0, 1]$ последовательность функций $x_n = n^{-n+1}$?

5. Сходится ли в пространстве $C^1[0, 1]$ последовательность функций

$$x_n = \frac{t^n}{n} ?$$

6. При каких α последовательность $x_n = \{1, 2^\alpha, 3^\alpha, \ldots, n^\alpha, 0, 0, \ldots\}$ сходится в l_p $(1 \leq p \leq \infty)$, c, c_0?

7. Найти элемент наилучшего приближения для точки $(1, 2, 3, \ldots, n)$ множеством элементов вида $(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i = 0$ в простран- стве R^n с евклидовой нормой.

8. Найти элемент наилучшего приближения для точки $(1, 2, 3, \ldots, n)$ множеством элементов вида $(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i = n^2$ в про- странстве R^n с евклидовой нормой.

9. Найти норму линейного оператора $A : l^2$-->l^2 и проверить дости жимость нормы

$$A(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots) = (\xi_1, \xi_1 + \xi_2, \ldots, \xi_1 + \ldots + \xi_n, \ldots)$$

10. Найти спектр оператора $A : L^2[0, 2\pi] \to L^2[0, 2\pi]$

$$(Ax)t = (2 - \cos t)x(t)$$

11. Найти расстояние от элемента $\cos(\pi t/2)$ до множества функций ви- да

$M = \quad x(t) : \int_1 x(t)dt = 3$ в пространстве $L^2[0, 2]$.

12. При каких p и q выполнено $l_p \subset l_q$?

13. Найти норму линейного оператора $A : l^1 \to l^2$. $A(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots) = (\xi_1, 2\xi_2, \xi_3, 2\xi_4, \ldots, \xi_{2n-1}, 2\xi_{2n}, \ldots)$

14. Найти норму линейного оператора $A : l^1 \rightarrow l^2$. $A(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots) = (3\xi_1, 2\xi_2, 3\xi_3, 2\xi_4, \ldots, 3\xi_{2n-1}, 2\xi_{2n}, \ldots)$

15. Найти оператор, сопряженный к $A : l^2 \rightarrow l^2$

$A(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots) = (0, \xi_1, 0, 2\xi_2, 0, 3\xi_3, \ldots, 0, n\xi_n, 0, \ldots)$

Σ

16. Найти элемент наилучшего приближения для точки $(0, 1, 0, 1 \ldots, 0, 1)$ множеством элементов вида $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$: $a_n = 0$ в простран- стве R^n с евклидовой нормой.

Контрольная работа №2.

1. Найти норму линейного оператора $A : C[0, 2]$ $C[0, 2]$ и проверить достижимость нормы

$$(Ax)t = (t - 1)^2 x(t)$$

2. Найти норму линейного оператора $A : C[0, 2]$ $L^2[0, 2]$ и проверить достижимость нормы

$$(Ax)t = 2tx(t)$$

3. Найти норму линейного оператора $A : C[0, 2]$ $L^2[0, 2]$ и проверить достижимость нормы

$$(Ax)t = t^3 x(t) - 2x(0)$$

4. Найти норму линейного оператора $A : C[0, 2]$ $C[0, 2]$ и проверить достижимость нормы $(Ax)t = \int cos(\pi s) x(s/2) ds$

5. Найти норму линейного оператора $A : l^2$--> l^2 и проверить дости жимость нормы

$A(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots) = (2\xi_1, 3\xi_2, \ldots, (n + 1)\xi_n, \ldots)$

6. Найти норму линейного оператора $A : L^2[0, 2]$ $C[0, 2]$ и проверить достижимость нормы

$(Ax)t = \int x(s) s^3 ds$

7. Найти норму линейного оператора $A : C[0, 2]$ $C[0, 2]$ и проверить достижимость нормы $(Ax)t =$

$$\int_0^t (3s + 2)x(s)ds + 2x(t)$$

8. Найти норму линейного оператора $A : L^2[0, 2\pi]$ $C[0, 2\pi]$ и прове- рить достижимость нормы $(Ax)t =$

$$\int_0^t x(s) \sin s ds$$

9. Найти спектр оператора $A : L^2[0, 3] \to L^2[0, 3]$

$$(Ax)t = e^t x(t)$$

Контрольная работа №3.

1. Найти расстояние от элемента $2 + \cos(\frac{\pi t}{})$ до множества функций вида $M = x(t) : \int x(t)dt = 2 \int_2 x(t)dt$ в пространстве $L^2[0, 2]$.

2. Найти расстояние от элемента $\cos(\pi t/2)$ до множества функций ви да $M = x(t) : \int x(t)dt = \int x(t)dt$ в пространстве $L^2[0, 2]$.

3. Найти спектр линейного оператора $A : C[0, 2]$---> $C[0, 2]$ $(Ax)t = (2t + 1)x(t) + x(0)$

4. Доказать, что единичный шар в $C[a, b]$ не компактен.

5. Найти сопряженный оператор к $A : l^2 \to \mathbb{R}^2$

$$A(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots) = (2\xi_1 - \xi_2, 3\xi_2 + 7\xi_5)$$

6. Пусть $C_0(\mathbb{R})$ – пространство всех непрерывных функций у которых $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ с нормой $x = \sup_{t \in \mathbb{R}} x(t)$. Является ли данное пространство полным, сепарабельным?

7. Найти спектр оператора $A : L^2[0, 3] \to L^2[0, 3]$

$$(Ax)t = (9 - t^2)x(t)$$

8. Найти расстояние от элемента $x(t) = t$ до множества функций вида

$$M = \quad x(t) : \int_1 x(t)dt = - \int_2 x(t)dt \qquad \text{в пространстве } L^2[0, 2].$$

9. Найти расстояние от элемента $\cos(\pi t/2)$ до множества функций ви- да $M =$ $x(t) : \int_1 \ x(t) \sin^2(\pi t)dt = 1$ в пространстве $L^2[0, 1]$.

10. Найти расстояние от элемента $\cos(\pi t/2)$ до множества функций ви да $M =$ $x(t) : \int \ x(t) \sin^2(\pi t)dt = 3$ в пространстве $L^2[0, 1]$.

,

11. Найти расстояние от элемента $\cos(\pi t)$ до множества функций вида

0

$$M = \quad x(t) : \int_1 \cos(\pi t)x(t)dt = 100 \qquad \text{в пространстве } L^2[0, 2].$$

12. Доказать, что в ЛНП из условия $B(x, r) \subset B(y, R)$ следуют нера венства $r < R$, $\|x - y\| \le R - r$

13. Найти расстояние от элемента $\cos(\pi t/2)$ до множества функций ви да $M =$ $x(t) : \int_1 \ x(t)dt = 3 \int_2 x(t)dt$ в пространстве $L^2[0, 2]$.

14. Найти оператор, сопряженный к $A : l^2 \to l^2$

$$A(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots) = (2\,\xi_2,\ 3\,\xi_4, \ldots, n + 1\ \xi_{2n}, \ldots)$$

15. Найти норму линейного оператора $A : C[0, 4] \to C[0, 2]$

$$(Ax)t = (t + 1)x(t^2)$$

16. Найти оператор, сопряженный к $A : l^2 \to l^2$

$$A(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots) = (\xi_2,\ 2\,\xi_4, \ldots, n\xi_{2n}, \ldots)$$

17. Найти расстояние от элемента $\cos(\pi t)$ до множества функций вида

$$M = \quad x(t) : \int_{1} x(t)dt = 3 \qquad \text{в пространстве } L^2[0, 1].$$

18. Найти оператор, сопряженный к $A : l^2 \to \mathsf{R}^3$

$$A(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots) = (\xi_2 - \xi_1, \xi_4 - 2\xi_1, 2\xi_6 - \xi_1)$$

19. Найти оператор, сопряженный к $A : l^2 \to l^2$

$$A(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots) = (\xi_1, \xi_1 + 2\xi_2, \xi_2 + 2\xi_3, \ldots, \xi_{n-1} + 2\xi_n, \ldots)$$

20. Найти расстояние от элемента $\cos(t)$ до множества функций вида

$$M = \quad x(t) : \int_{\pi/2} x(t)dt = 3 \qquad \text{в пространстве } L^2[0, \pi].$$

Приложение 5
к рабочей программе

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДЕНЫ
на заседании кафедры
шахматного искусства
и компьютерной математики

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ

ПРОМЕЖУТОЧНОГО КОНТРОЛЯ

по дисциплине
функциональный анализ

Билеты для экзамена

Билет 1.

1. Теорема о последовательности вложенных замкнутых сфер в полном пространстве. Принцип сжимающих отображений.

2. Найти норму линейного оператора $A : C[0,2] \to L^2[0,2]$ и проверить достижимость нормы
$$(Ax)t = 2tx(t)$$

3. Сходится ли в пространстве $C[a,b]$ последовательность функций $x_n = t^n - t^{3n}$?

4. Найти расстояние от элемента $\cos(\pi t/2)$ до множества функций вида $M = \left\{ x(t) : \int_0^1 x(t)dt = \int_1^2 x(t)dt \right\}$ в пространстве $L^2[0,2]$.

Билет 2.

1. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля, связь с полнотой, свойства минимальности сумм Фурье. Теорема Рисса-Фишера.

2. Найти спектр линейного оператора $A : C[0,2] \to C[0,2]$ $(Ax)t = (2t+1)x(t) + x(0)$

3. Сходится ли в пространстве $C[a,b]$ последовательность функций $x_n = t^n - t^{2n}$?

4. Найти расстояние от элемента $\cos(\pi t/2)$ до множества функций вида $M = \left\{ x(t) : \int_{-1}^1 x(t)dt = \int_0^1 x(t)dt \right\}$ в пространстве $L^2[-1,1]$.

Билет 3.

1. Компактность и предкомпактность, доказательство что непрерывный функционал достигает своей верхней и нижней грани на компактном множестве, Теорема Хаусдорфа (критерий компактности в метрическом пространстве)

2. Найти норму линейного оператора $A : C[0,2] \to L^2[0,2]$ и проверить достижимость нормы

$$(Ax)t = t^3 x(t) - 2x(0)$$

3. Сходится ли в пространстве $C^1[0,1]$ последовательность функций

$$x_n = \frac{t^n}{n} - \frac{t^{n+1}}{n+1} \ ?$$

4. Доказать, что единичный шар в $C[a,b]$ не компактен.

Билет 4.

1. Понятие метрики, основные определения (предел последовательности, предельные и граничные точки множества, открытость и замкнутость), доказательство открытости и замкнутости открытого и замкнутого шаров

2. Найти норму линейного оператора $A : C[0,2] \to C[0,2]$ и проверить достижимость нормы

$$(Ax)t = \int_0^t cos(\pi s) x(s/2) ds$$

3. Найти сопряженный оператор к $A : l^2 \to \mathbb{R}^2$

$$A(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots) = (2\xi_1 - \xi_2, 3\xi_2 + 7\xi_5)$$

4. Найти элемент наилучшего приближения для точки $(1, 1, 1, \ldots, 1)$ множеством элементов вида $\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : \sum a_n = a_1 - a_n\}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ с евклидовой нормой.

Билет 5.

1. Определение фундаментальной последовательности, определение полноты пространства. Теорема о пополнении пространства (формулировка и схема пополнения). Доказательство полноты n-мерного евклидова пространства, полноты пространства $C[a, b]$,

2. Найти норму линейного оператора $A : l^2 \to l^2$ и проверить достижимость нормы

$$A(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots) = (\frac{1}{2}\xi_1, \frac{2}{3}\xi_2, \ldots, \frac{n}{n+1}\xi_n, \ldots)$$

3. Сходится ли в пространстве $C^1[0, 1]$ последовательность функций

$$x_n = \frac{t^n}{n} \ ?$$

4. Пусть $C_0(\mathbb{R})$ – пространство всех непрерывных функций у которых $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ с нормой $\|x\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t)|$. Является ли данное пространство полным, сепарабельным?

Билет 6.

1. Линейные операторы, непрерывность линейного оператора. Теорема о свойствах оператора, эквивалентных непрерывности. Пространство линейных операторов.

2. Найти норму линейного оператора $A : L^2[0, 2] \to C[0, 2]$ и проверить достижимость нормы

$$(Ax)t = \int_0^t x(s)s^3 ds$$

3. При каких α последовательность $x_n = \{1, 2^\alpha, 3^\alpha, \ldots, n^\alpha, 0, 0, \ldots\}$ сходится в l_p $(1 \leq p \leq \infty)$, c, c_0?

4. Найти элемент наилучшего приближения для точки $(1, 0, 0, \ldots, 0, 0, 1)$ множеством элементов вида $\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_1 = a_2\}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ с евклидовой нормой.

Билет 7.

1. Норма линейного оператора, Теорема об эквивалентности непрерывности, конечности нормы и ограниченности

2. Найти норму линейного оператора $A : L^2[0,4] \to C[0,4]$ и проверить достижимость нормы

$$(Ax)t = \int_0^t x(s)s^2 ds$$

3. В каких из пространств l_p, c, c_0 сходится последовательность $x_n = \left\{1, \frac{1}{\ln 2}, \frac{1}{\ln 3}, \ldots, \frac{1}{\ln n}, 0, 0, \ldots\right\}$ сходится?

4. Найти элемент наилучшего приближения для точки $(1, 2, 3, \ldots, n)$ множеством элементов вида $\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : \sum a_i = 0\}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ с евклидовой нормой.

Билет 8.

1. Норма линейного оператора, Теорема об эквивалентности непрерывности, конечности нормы и ограниченности

2. Найти норму линейного оператора $A : C[0,2] \to C[0,2]$ и проверить достижимость нормы

$$(Ax)t = \int_0^t (3s+2)x(s)ds - 2x(t)$$

3. Найти сопряженный к оператору $A : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$

$$(Ax)(t) = \int_0^t e^{t-s}x(s)ds$$

4. Найти элемент наилучшего приближения для точки $(1, 2, 3, \ldots, n)$ множеством элементов вида $\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : \sum a_i = n^2\}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ с евклидовой нормой.

Билет 9.

1. Спектр вполне непрерывного оператора.

2. Найти норму линейного оператора $A : L^2[0, 2\pi] \to C[0, 2\pi]$ и проверить достижимость нормы

$$(Ax)t = \int_0^t x(s) \sin s ds$$

3. В каких из пространств l_p, c, c_0 последовательность

$$x_n = \left\{1, \frac{1}{\ln 2}, \frac{1}{\ln 3}, \ldots, \frac{1}{\ln n}, 0, 0, \ldots\right\}$$

сходится?

4. Найти расстояние от элемента $\sin(\pi t)$ до множества функций вида $M = \left\{x(t) : \int_0^1 x(t)dt = \int_1^2 x(t)dt\right\}$ в пространстве $L^2[0, 2]$.

Билет 10.

1. Изоморфизм пространств, Теорема об изоморфизме конечномерного пространства и R^n и следствия.

2. Найти норму линейного оператора $A : L^2[0, 2] \to L^2$ [0,2] и проверить достижимость нормы

$$(Ax)t = \int_0^t x(s)sds$$

3. Найти спектр оператора

$$A(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots) = (\xi_1 + 2\xi_2, \frac{2}{3}\xi_2, \ldots, \frac{n}{n+1}\xi_n, \ldots)$$

4. Найти расстояние от элемента $\sin(\pi t)$ до множества функций вида $M = \left\{x(t) : \int_0^1 x(t)dt = 2\pi\right\}$ в пространстве $L^2[0, 2]$.

Билет 11.

1. Лемма Рисса о почти перпендикуляре Замкнутость конечномерного подпространства.

2. Найти норму линейного оператора $A : l^2 \to l^2$ и проверить достижимость нормы

$$A(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots) = (0, \frac{3}{2}\xi_1, \frac{6}{3}\xi_2, \ldots, \frac{3n}{1+n}\xi_n, \ldots)$$

3. Найти спектр оператора $A : L^2[0,3] \to L^2[0,3]$

$$(Ax)t = e^t x(t)$$

4. Найти расстояние от элемента t^2 до множества функций вида $M = \left\{ x(t) : \int_0^1 x(t)dt = \int_1^2 x(t)dt \right\}$ в пространстве $L^2[0,2]$.

Билет 12.

1. Характеризация конечномерности (эквивалентность разных свойств и конечномерности)

2. Найти норму линейного оператора $A : l^2 \to l^2$ и проверить достижимость нормы

$$A(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots) = (\xi_1, \xi_1 + \xi_2, \ldots, \xi_1 + \ldots + \xi_n, \ldots)$$

3. Найти спектр оператора $A : L^2[0,2\pi] \to L^2[0,2\pi]$

$$(Ax)t = (2 - \cos t)x(t)$$

4. Найти расстояние от элемента $\cos(\pi t/2)$ до множества функций вида $M = \left\{ x(t) : \int_0^1 x(t)dt = 3 \right\}$ в пространстве $L^2[0,2]$.

Билет 13.

1. Линейные функционалы, свойства линейных функционалов, сопряженное пространство, теорема о функционалах с совпадающим ядром.

2. Найти норму оператора $A : l^2 \to l^2$ для

$$A(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots) = (\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}, \sqrt{\xi_2^2 + \xi_3^2}, \ldots, \sqrt{\xi_n^2 + \xi_{n+1}^2}, \ldots)$$

3. При каких p и q выполнено $l_p \subset l_q$?

4. Найти расстояние от элемента $\cos(\pi t)$ до множества функций вида $M = \left\{x(t) : \int_0^1 \sin(\pi t) \cdot x(t)dt = \int_1^2 \cos(\pi t) \cdot x(t)dt\right\}$ в пространстве $L^2[0, 2]$.

Билет 14.

1. Теорема Хана-Банаха (формулировка, следствия и доказательство следствий)

2. Найти норму линейного оператора $A : l^1 \to l^2$.

$$A(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots) = (\xi_1, 2\xi_2, \xi_3, 2\xi_4, \ldots, \xi_{2n-1}, 2\xi_{2n}, \ldots)$$

3. Решить уравнение в пространстве непрерывных функций $C[0, 2]$ при всех значениях λ

$$\lambda x(t) = \int_0^2 stx(s)ds + t^2$$

4. Найти элемент наилучшего приближения для точки $(0, 0, 0, 0, 1)$ множеством элементов вида $\{(a, b, c, d, e) : a + c + d = 2e - b\}$ в пространстве $\mathbb{R}^5$ с нормой $\|(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)\| = (\sum |x_i|^2)^{1/2}$.

Билет 15.

1. Спектр оператора, свойства спектра.

2. Найти норму линейного оператора $A : l^1 \to l^2$.

$$A(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots) = (3\xi_1, 2\xi_2, 3\xi_3, 2\xi_4, \ldots, 3\xi_{2n-1}, 2\xi_{2n}, \ldots)$$

3. Найти оператор, сопряженный к $A : l^2 \to l^2$

$$A(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots) = (0, \xi_1, 0, 2\xi_2, 0, 3\xi_3, \ldots, 0, n\xi_n, 0, \ldots)$$

4. Найти элемент наилучшего приближения для точки $(0, 1, 0, 1 \ldots, 0, 1)$ множеством элементов вида $\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : \sum a_n = 0\}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ с евклидовой нормой.

Билет 16.

1. Понятие фундаментальной последовательности и полноты. Теорема о пополнении пространства (формулировка и схема пополнения). Доказательство полноты пространства l_2.

2. Найти норму линейного оператора $A : l^2 \to l^2$ и проверить достижимость нормы

$$A(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots) = (\frac{2}{5}\xi_2, \frac{4}{8}\xi_3, \ldots, \frac{2n}{4+n^2}\xi_{n+1}, \ldots)$$

3. Найти спектр оператора $A : L^2[0, 3] \to L^2[0, 3]$

$$(Ax)t = (9 - t^2)x(t)$$

4. Найти расстояние от элемента $x(t) = t$ до множества функций вида $M = \left\{x(t) : \int_0^1 x(t)dt = -\int_1^2 x(t)dt\right\}$ в пространстве $L^2[0, 2]$.

Билет 17.

1. Скалярное произведение, его свойства, неравенства Коши-Буняковского, определение нормы через скалярное произведение и доказательство свойств нормы. Теорема об ортогональном разложении Гильбертова пространства и следствие.

2. Найти норму оператора $A : L^2[0,5] \to \mathbb{R}$

$$Ax = \int_0^1 x(t)dt - 4\int_4^5 x(t)dt$$

3. Решить уравнение в пространстве непрерывных функций $C[0,2]$ при всех значениях λ

$$\lambda x(t) = \int_0^2 (s-t)x(s)ds + t^2$$

4. Найти расстояние от элемента $\cos(\pi t/2)$ до множества функций вида $M = \left\{x(t) : \int_{-1}^1 x(t)\sin^2(\pi t)dt = 1\right\}$ в пространстве $L^2[-1,1]$.

Билет 18.

1. Теорема о последовательности вложенных замкнутых сфер в полном пространстве. Принцип сжимающих отображений.

2. Найти норму оператора $A : C[0,4] \to \mathbb{R}$ и проверить достижимость нормы

$$Ax = \int_3^4 x(t)dt - 2\int_0^2 tx(t)dt$$

3. Решить уравнение в пространстве непрерывных функций $C[0,2]$ при всех значениях λ

$$x(t) = \lambda\int_0^2 (s-2t)x(s)ds + 5t$$

4. Найти расстояние от элемента $\cos(\pi t/2)$ до множества функций вида $M = \left\{x(t) : \int_0^1 x(t)\sin^2(\pi t)dt = 3\right\}$ в пространстве $L^2[0,1]$.

Билет 19.

1. Ортогональные, ортонормированные, замкнутые и полные системы, ряды Фурье. Теоремы о существовании полной ОНС в сепарабельном Гильбертовом пространстве.

2. Найти норму оператора $A : L^1[0,3] \to \mathbb{R}$

$$Ax = \int_0^2 tx(t)dt - \int_2^3 x(t)dt$$

3. Решить уравнение в пространстве непрерывных функций $C[0,2]$ при всех значениях λ

$$x(t) = \lambda \int_0^2 (s+2t)x(s)ds - t^2$$

4. Найти расстояние от элемента t^2 до множества функций вида $M = \left\{x(t) : \int_0^1 tx(t)dt = \int_{-1}^0 x(t)dt\right\}$ в пространстве $L^2[-1,1]$.

Билет 20.

1. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля, связь с полнотой, свойства минимальности сумм Фурье. Теорема Рисса-Фишера.

2. Найти норму оператора $A : l^1 \to \mathbb{R}^2$ и проверить достижимость нормы,

$$A(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots) = (\sum_{k\in\mathbb{Z}} \xi_k, 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} \xi_{2k})$$

3. Решить уравнение в пространстве непрерывных функций $C[0,2\pi]$ при всех значениях λ

$$\lambda x(t) = \int_0^{2\pi} (s+3)x(s)ds + \sin t$$

4. Найти расстояние от элемента $\cos(\pi t)$ до множества функций вида $M = \left\{x(t) : \int_0^1 \cos(\pi t)x(t)dt = 100\right\}$ в пространстве $L^2[0,2]$.

Билет 21.

1. Теорема об изоморфизме сепарабельных Гильбертовых пространств.

2. Доказать, что в ЛНП из условия $B(x,r) \subset B(y,R)$ следуют неравенства $r < R$, $\|x-y\| \le R-r$

3. Решить уравнение в пространстве непрерывных функций $C[0,2]$ при всех значениях λ

$$x(t) = \lambda \int_0^2 tx(s)ds + t^2$$

4. Найти расстояние от элемента $\cos(\pi t/2)$ до множества функций вида $M = \left\{x(t) : \int_0^1 x(t)dt = 3\int_1^2 x(t)dt\right\}$ в пространстве $L^2[0,2]$.

Билет 22.

1. Сопряженный оператор, его свойства. Биортогональные системы. Теоремы о собственных значениях.

2. Найти норму оператора $A : l^1 \to \mathbb{R}^2$ и проверить достижимость нормы,

$$A(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots) = (2\xi_1 + 2\xi_4 - 3\xi_5, 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} \xi_{2k})$$

3. Найти оператор, сопряженный к $A : l^2 \to l^2$

$$A(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots) = (\frac{1}{2}\xi_2, \frac{1}{3}\xi_4, \ldots, \frac{1}{n+1}\xi_{2n}, \ldots)$$

4. Найти расстояние от элемента t^2 до множества функций вида $M = \left\{x(t) : \int_0^1 x(t)dt = 0\right\}$ в пространстве $L^2[-1,1]$.

1. Компактные и вполне непрерывные операторы, их свойства.
2. Найти норму линейного оператора $A : C[0,4] \to C[0,2]$
$$(Ax)t = (t+1)x(t^2)$$
3. Найти оператор, сопряженный к $A : l^2 \to l^2$
$$A(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots) = (\xi_2, \frac{1}{2}\xi_4, \ldots, \frac{1}{n}\xi_{2n}, \ldots)$$
4. Найти расстояние от элемента $\cos(\pi t)$ до множества функций вида $M = \left\{x(t) : \int_{-1}^{1} x(t)dt = 3\right\}$ в пространстве $L^2[-1,1]$.

Билет 23.

1. Свойства спектра самосопряженного оператора.
2. Найти норму линейного оператора $A : L^2[0,3] \to L^2[0,3]$
$$(Ax)t = t\int_0^3 x(s)ds$$
3. Найти оператор, сопряженный к $A : l^2 \to \mathbb{R}^3$
$$A(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots) = (\xi_2 - \xi_1, \xi_4 - 2\xi_1, 2\xi_6 - \xi_1)$$
4. Найти расстояние от элемента $3\cos(\pi t)$ до множества функций вида $M = \left\{x(t) : \int_{-1}^{1} x(t)dt = 1\right\}$ в пространстве $L^2[-1,1]$.

Билет 24.

1. Компактные и вполне непрерывные операторы, их свойства.
2. Найти спектр линейного оператора $A : C[0,2] \to C[0,2]$
$$(Ax)t = 2x(t) + 3\int_0^2 x(t)$$
3. Найти оператор, сопряженный к $A : l^2 \to l^2$
$$A(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots) = (\xi_1, \xi_1 + 2\xi_2, \xi_2 + 2\xi_3, \ldots, \xi_{n-1} + 2\xi_n, \ldots)$$
4. Найти расстояние от элемента $\cos(t)$ до множества функций вида $M = \left\{x(t) : \int_0^{\pi/2} x(t)dt = 3\right\}$ в пространстве $L^2[0,\pi]$.

Билет 25.

1. Компактные и вполне непрерывные операторы, их свойства.
2. Найти норму линейного оператора $A : l^2 \to l^1$.
$$A(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots) = (3\xi_1, 2\xi_2, 3\xi_3, 2\xi_4, \ldots, 3\xi_{2n-1}, 2\xi_{2n}, \ldots)$$
3. Найти оператор, сопряженный к $A : l^2 \to l^2$
$$A(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots) = (\xi_1, -\xi_1, 2\xi_2, -2\xi_2, 3\xi_3, \ldots, n\xi_n, -n\xi_n, \ldots)$$
4. Найти элемент наилучшего приближения для точки $(1, 0, 1 \ldots, 0, 1)$ множеством элементов вида $\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : \sum a_n = 0\}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ с евклидовой нормой.

Билет 26.

1. Спектр оператора, свойства спектра.
2. Найти норму оператора $A : l^1 \to \mathbb{R}^2$ и проверить достижимость нормы,
$$A(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots) = (2\xi_2 - 2\xi_1 + \xi_5, \sum_{k \in \mathbb{Z}} \xi_{2k})$$
3. Найти оператор, сопряженный к $A : l^2 \to l^2$
$$A(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots) = (\frac{\xi_1 + \xi_2}{2}, \frac{\xi_3 + \xi_4}{3}, \ldots, \frac{\xi_{2n-1} + \xi_{2n}}{n+1}, \ldots)$$
4. Найти расстояние от элемента t^2 до множества функций вида $M = \left\{x(t) : \int_{-1}^{1} x(t)dt = 0\right\}$ в пространстве $L^2[-3, 3]$.

Билет 27.

1. Лемма Рисса о почти перпендикуляре Замкнутость конечномерного подпространства.
2. Найти норму линейного оператора $A : l^2 \to l^2$ и проверить достижимость нормы
$$A(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots) = (\frac{1}{2}\xi_1, \frac{3}{3}\xi_2, \ldots, \frac{2n-1}{1+n}\xi_n, \ldots)$$
3. Найти спектр оператора $A : L^2[0, 3] \to L^2[0, 3]$
$$(Ax)t = (t - t^2)x(t)$$
4. Найти расстояние от элемента t^2 до множества функций вида $M = \left\{x(t) : \int_0^1 x(t)dt = 2\int_0^2 x(t)dt\right\}$ в пространстве $L^2[0, 2]$.